Chapitre 2 : Suites numériques

I) Rappels et définitions

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$
$\mathbb{R}$ qui a un nombre n associe un réel u_n

Exemple: $n = 0$ $\qquad u_0 = 2$

$n = 1$ $\qquad u_1 = \frac{3}{2}$

$n = 2$ $\qquad u_2 = \frac{4}{3}$

On étudie les suites arithmétiques et géométriq
arithmétique:

u_0

$u_1 = u_0 + R$ $\qquad (R = \text{Raison})$

$-\quad-\quad-$

$u_n = u_0 + n \times R$

$$\boxed{u_n = u_m + (n - m) \times R}$$

Exemple: soit une suite arithmetique telle que
$R=2$ et $u_7 = 12$

calculer u_{15} !

$u_{15} = u_7 + (15 - 7) \times 2$
$= 12 + 8 \times 2$
$= 28$

Calcule u_0:

$u_0 = u_7 (0 - 7) \times R$
$= 12 - 7 \times 2$

La somme des termes d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la moyenne du premier est du dernier si le 1er terme est U_0 et le dernier U_n.

$$\boxed{S = (n+1)\,\frac{U_0 + U_n}{2}}$$

Exemple
Calculer la somme

$2 + 5 + 8 + \cdots + 35$

$R = 3$

$U_n = 35 = 2 + n \times 3$ $\qquad (U_n = U_0 + n \times R)$

$= 2 + 3n \Rightarrow \boxed{n = 11}$

$n = 12$ termes

Donc $S = 12 \times \dfrac{2+35}{2}$

$= 6 \times 37$

$= 222$

Les suites géométriques :

U_0

$U_1 = U_0 \times q$ $\qquad (q = \text{raison})$

$- \quad - \quad -$

$U_n = U_0 \times q^n$

ou encore $\boxed{U_n = U_m \times q^{n-m}}$

Exemple :

$U_2 = 27 \qquad q = 3$

calculer u_5 puis u_0

$U_5 = u_2 \times q^{n-m}$

$= 27 \times 3^{5-2}$

$= 27 \times 3^3$

$= 27 \times 27$

$= 729$

$U_0 = U_2 \times q^{n-m}$

$= 27 \times 3^{0-2}$

$= 27 \times 3^{-2}$

$= 27 \times \frac{1}{3^2} = \frac{27}{9} = 3$

Somme des termes d'une suites géometriques

$$\boxed{S = U_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

nombre de termes

premier Terme

Exemple

$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{1024}$

U_0

$q = \frac{1}{2}$

$U_m = V_0 q^m$

$U_m = 1 \times \left(\frac{1}{}\right)^m \qquad \frac{1}{} = \frac{1}{} = \left(\frac{1}{}\right)^{10} \qquad \boxed{m = 10}$

Donc

$$S = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right)$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{2048}\right.$$

$$= 2 \times \frac{2047}{2048} = \boxed{\frac{2047}{1024}}$$

II) Raisonnement par Recurrence

Pour démontrer une propriété par recurrence, on doit :

① Vérifier que la propriété est vraie au premier rang (initialisation)

② On suppose que la propriete est vraie à un rang p quelconque et on démonte alors qu'elle est encore vraie au rang suivant (p+1) (hérédité)

③ On peut alors conclure que la propriété est vrai quelque soit le rang n.
(conclusion)

Exemple : démontrer que la somme des cubes de n premiers entiers est $S = \frac{n^2+(n+1)^2}{4}$

① initialisation

$n = 1$ $\quad S = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$ $\quad 1^3 = 1$

La propriéte est vrai au rang 1

② hérédité :

On suppose la propriété vrai a un rang P quelc

Donc $S_p = \frac{P^2(P+1)^2}{4}$

$1^3+2^3+3^3+ \dots +P^3 = \frac{P^2(P+1)^2}{4}$

Démontrons qu'elle est encore vraie au rang suiva

$$1^3+2^3+ \dots +P^3+(P+1)^3 = \frac{P^2(P+1)^3}{4} + (P+1)^3$$

$$= \frac{P^2(P+1)^2 + 4(P+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(P+1)^2[P^2+4(P+1)]}{4}$$

$$= \frac{(P+1)^2(P^2+4P+4)}{4}$$

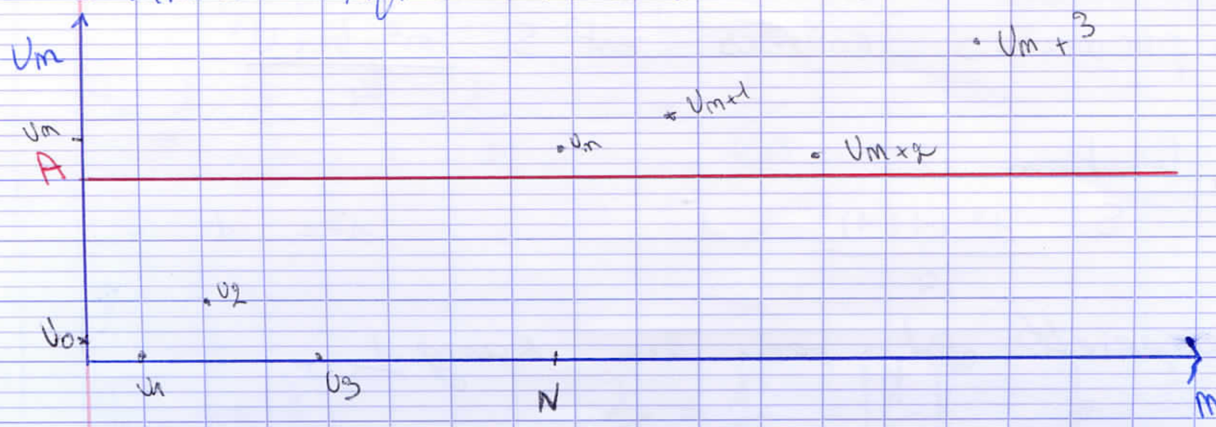
Donc $1^3+2^3+ \dots +(P+1)^3 = \frac{(P+1)^2(P+1)^2}{4}$

La propriété est donc vrai au rang $p+1$

③ Conclusion : La propriété étant vraie au premie et l'hérédité étant prouvée, elle est donc vrai quelque soit le rang n.

III) Limites de suites

① Limite infinie d'une suite



Définition : Si quelque soit le nombre réel positif A, il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]A ; +\infty[$ alors la suite (U_n) tend vers $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$$

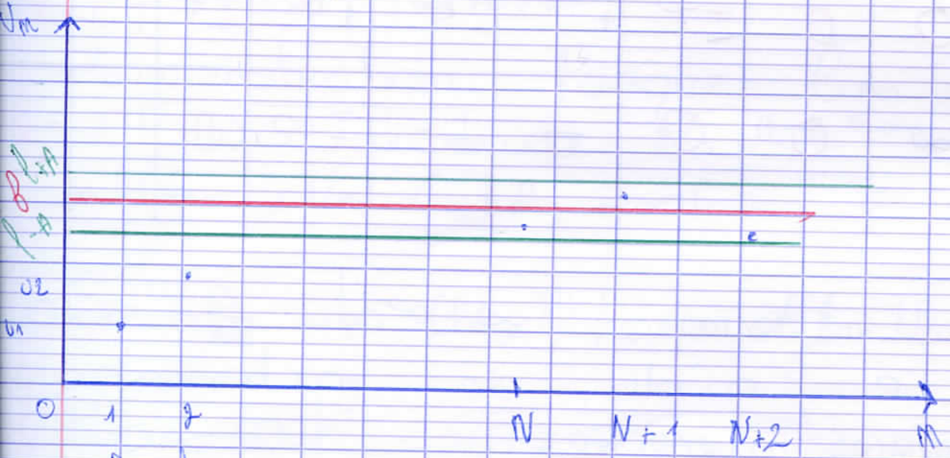
Tous les U_n appartiennent donc à l'intervalle $]A ; +\infty[$ sauf un nombre fini d'entre eux.

Exemple : Si $U_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$$

R Les suites de terme principal n^3, $\sqrt{n}$, q^n avec $q > 1$
Se sont des suites qui divergent vers $+\infty$

② Limite finie d'une suite



Définition : Si quelque soit l'intervalle ouvert contenant ℓ ($]\ell+A ; \ell-A[$), tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle sauf un nombre fini d'entre eux, alors la suite converge vers la limite finie ℓ et on écrit

Ⓡ L'écriture lim u_n est équivalente à $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exemples : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

de même $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ convergent également vers 0.

Les suites géométriques telles que $0 \leq |q| < 1$ convergent vers 0.

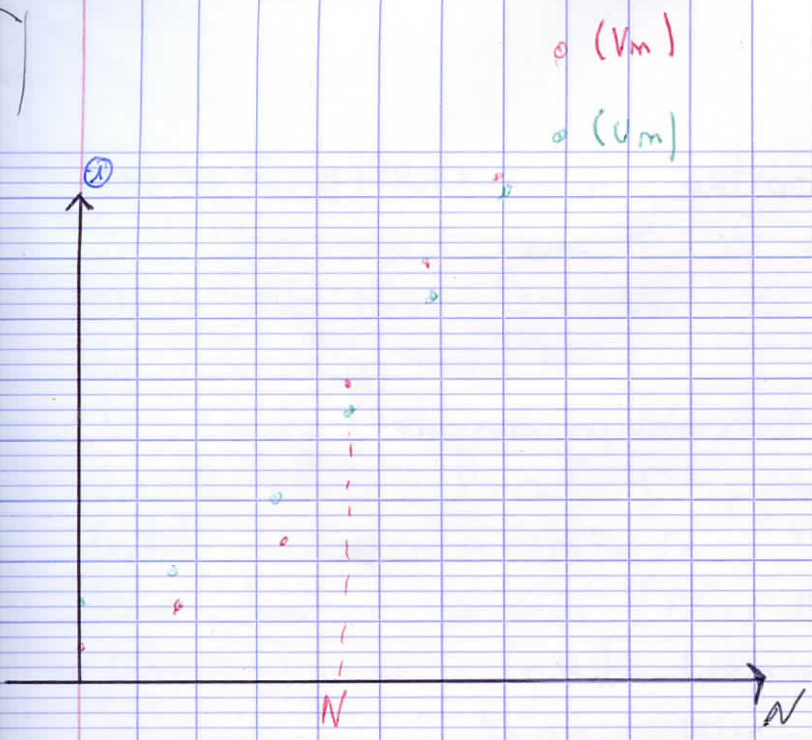
IV) Opérations sur les limites

On peut, sous certains conditions, effectuer des additions, multiplication et quotiens de limites.

lim U_n	l	l	0	$\pm l$	$\pm l$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	$+\infty$	$-\infty$
lim V_n	l'	0	l'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm l$	$\pm l$	$+\infty$	$-\infty$	∓ 0	± 0
lim $(V_n + U_n)$	$l + l'$	l	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\mp\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
lim $(V_n \times U_n)$	$l \times l'$	0	0	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	F.I	F.I	F.I	F.I
lim $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$	$\frac{l}{l'}$	$\pm\infty$	0	0	0	$\pm\infty$	$\mp\infty$	0	0	$\mp\infty$	$\pm\infty$

Ⓡ : Les formes indéterminées ("$\infty - \infty$"), "$\frac{0}{\infty}$", "$\infty \times 0$", "$\frac{\infty}{\infty}$" seront études à l'aide de factorisations et d'autres techniques appropiées
On peut également utiliser les Théorème de comparaison

VI) Théorème de comparaison



$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

Théorème: Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

Si à partir d'un certain rang N, pour tout $n \geq$ on a $V_n > U_n$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

démonstration: Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$, quelque soit $A>0$, il existe N_0 tel que pour tout $n > N_0$, $U_n \in]A;+\infty[$

Si $n \geq \mathrm{Sup}(N, N_0)$, on a $V_n \geq U_n$ et $V_n \in]A;+\infty[$

R on peut écrire un Théorème équivalent en $-\infty$

Exemple: $V_n = n + (-1)^n$

si n est pair $V_n = n+1$

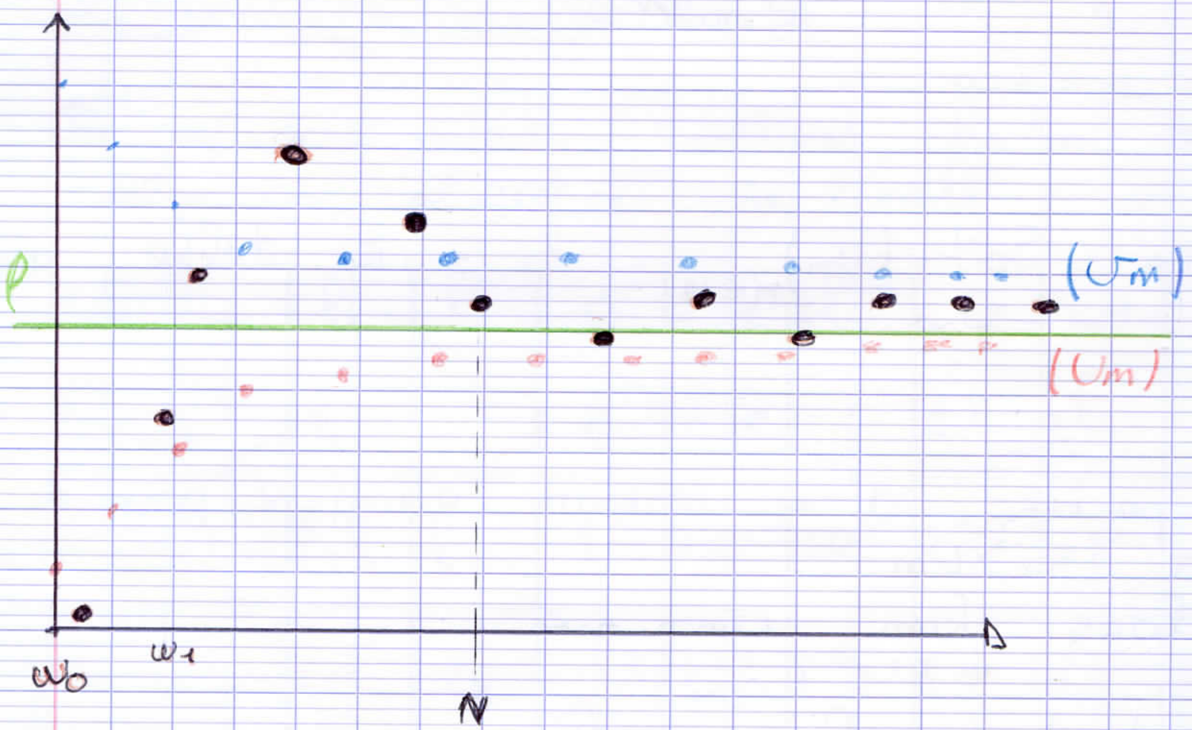
Si n est impair $V_n = n-1$

On ne peut pas déterminer la limite

de $(-1)^n$ par contre $n+(-1)^n \geqslant n-1$
et $\lim\limits_{n \to +\infty} n-1 = +\infty$

D'après théorème de comparaison,
$\lim\limits_{n \to +\infty} n+(-1)^n = +\infty$

② Théorème d'encadrement



Théorème : Soient (U_n) et (V_n) deux suite telles que

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} V_n = \ell$$

Si (W_n) est une suite tel que à partir d'un certain rang N :

$$U_n \leqslant W_n \leqslant V_n$$

alors, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} W = \ell$.

demonstration:
(U_m) Converge vers ℓ. il existe donc N_0 tel que si $m > N_0$ tous les $U_m \in]\ell - a ; \ell + a[$.
V_m converge vers ℓ.
il existe donc N_1 tel que si $m > N_1$ tous les $V_m \in]\ell - a ; \ell + a[$. D'apres les hypotheses, il existe N tel que pour $m \geq N$, $U_m \leq W_m \leq V_m$
Pour tout $m \geq \sup(N_0, N_1, N)$ on a alors $W_m \in]\ell - a ; \ell + a[$ et donc W_m converge vers ℓ.

$$\lim_{m \to +\infty} W_m = \ell.$$

Exemple: Soit $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ la suite definie par:

$$U_m = \frac{2m + \sin(N)}{m+1}$$

$$-1 \leq \sin u \leq 1$$

$$\frac{2m-1}{m+1} \leq U_m \leq \frac{2m+1}{m+1}$$

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{2m+1}{m+1} = \lim_{m \to +\infty} \frac{\cancel{m}\left(2 - \frac{1}{m}\right)}{\cancel{m}\left(1 + \frac{1}{m}\right)}$$

$$\lim_{m \to +\infty} 2 - \frac{1}{m} = 2$$

$$\text{donc } \lim_{m \to +\infty} \frac{2m-1}{m+1} = 2.$$

$$\lim_{m \to +\infty} 1 + \frac{1}{m} = 1$$

Pour des raisons analogues, on a:

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{2m+1}{m+1} = 2$$

On a donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n-1}{n+1} = \lim \frac{2n+1}{n+1} = 2$$

et pour tout n, $\frac{2n-1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{2n+1}{n+1}$

donc, d'après le theoreme des gendarmes

$$\lim_{n \to +\infty} = U_n = 2$$

VI) Suites majorées, minorées, bornées

Definition: * Une suite $(u_n)_{n \in N}$ est majorée par un nombre réel M si tous le termes de la suite sont plu petit que M. (M est un majorant de la suite).

* une suite $(u_n)_{n \in N}$ est minorée ~~si~~ par un nombre ré m si tous les termes de la suite sont plus grand m. (m est un minorant de la suite)

* Si une suite et minorée et majorée, elle est bor

Exemple: la suite definie par $U_n = \frac{1}{N}$ est minorée par 0 par tout les nombres plus petit que 0

La suite a pour premier terme $u_1 = 1$
Elle est decroissante, donc u_1 est un majorant de la s
pour tout $n \in N^*$ $\boxed{U_n \leq 1}$

La suite (u_n) est donc bornée.

R) Si une suite est croissante et converge vers une limite ℓ, alors ℓ est un majorant de la suite.

Propriété : toute suite croissante et majorée converge vers une limite finie ℓ.

Toute suite décroissante et minorée converge également.