Chapitre 2:

Probabilités conditionnelles

1.Exemple introductif: un joueur tire une carte au hasard dans un jeu de 32.

On considère les évènements suivants:

F="la carte tirée est une figure"

R="la carte tirée est un roi"

1)Calculer P(F), P(R) et P(R ∩ F) où P désigne la probabilité correspondant à l'équipartition.

2)Le joueur affirme: "la carte tirée est une figure". Quelle est alors la probabilité que ce soit un roi ?

Solution:

1) $P(F) = \frac{\text{Card}(F)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$; $P(R) = \frac{\text{Card}(R)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $P(R \cap F) = \frac{\text{Card}(R \cap F)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

2) Maintenant les seuls évènements de probabilité non nulle sont ceux constitués d'une partie des 12 figures du jeu de cartes (il n'ya plus équiprobabilité). Nous choisissons une nouvelle probabilité P_F qui sera nulle pour lesévènements ne correspondant pas à une figure et équirépartie pour les évènements élémentaires correspondant à une figure. Pour déterminer la probabilité que ce soit un roi, nous devons seulement considérer les figures qui sont des rois, donc compter les éléments de $R \cap F$, et donc : $P_F(R) = \frac{\text{Card}(R \cap F)}{\text{Card}(F)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

La probabilité $P_F(R)$ s'appelle **la probabilité conditionnelle de R par rapport à F**. On la note parfois $P(R|F)$ où $R|F$ représente l'événement "R est réalisé" sachant que F est réalisé.

Nous avons donc : $P_F(R) = \frac{P(R \cap F)}{P(F)}$.

2.Le théorème suivant généralise ce résultat :

Théorème: Soit une expérience aléatoire d'univers Ω de cardinal fini, P une probabilité sur Ω et B un événement tel que $P(B) \neq 0$. L'application P_B de $\wp(\Omega)$ dans [0;1] définie par $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ pour tout $A \in \wp(\Omega)$ est une probabilité.

Définition: Probabilité conditionnelle

L'application P_B ainsi définie s'appelle "probabilité B-conditionnelle".

La quantité $P_B(A)$ se lit " probabilité de A sachant B".

On a alors : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

3.Propriétés des probabilités conditionnelles

i. Pour tout évènement A, $0 \leqslant P_B(A) \leqslant 1$

ii. $P_B(A) + P_B(\bar{A}) = 1$

iii. $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(A) \times P_A(B)$ si $P(A)$ et $P(B)$ sont non nuls

iv. $P_B(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A \cap B}{\text{nombre de cas favorables à } B}$

démonstration:

i. $0 \leq P(A \cap B) \leqslant P(B)$

ii. $P_B(A) + P_B(\bar{A}) = \frac{P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)}$

iii. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

iv. voir cours de première

4.Formules des probabilités totales

Définition: une partition de Ωest un ensemble de parties deux à deux disjointes de Ω dont la réunion est Ω.

Théorème: Soit Ω un univers muni d'une probabilité P. Si des parties B_1, B_2, ... , B_n de probabilités non nulles constituent une partition de Ω, alors pour tout évènement A, on a :

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(A\cap B_k)=\sum_{k=1}^{n}P_{B_k}(A)P(B_k)$$

ce qui donne pour trois événements A, B, C formant une partition de Ω et D un événement quelconque :

$$P(D)=P(A)\times P_A(D)+P(B)\times P_B(D)+P(C)\times P_C(D)$$

$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$

démonstration: A, B, C formant une partition $P(D) = P(\cap A) + P(D \cap B) + P(B \cap C)$. Il suffit alors d'utiliser les égalités établies au-dessus pour conclure.

arbre de probabilités :

chaque branche de l'arbre porte au premier niveau les probabilités des événements A, B, C, ... puis au second niveau les probabilités conditionnelles.

On observe les règles suivantes:

la somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1

la probabilité d'un événement au bout d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches composant ce chemin.

la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des branches qui aboutissent à cet événement.

5.indépendance

définition de l'indépendance d'événements:

Soit P une probabilité sur un univers Ω .

On dit que deux événements A et B de probabilités non nulles sont P-indépendants lorsque la réalisation ou la non-réalisation de l'un n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation ou de non-réalisation de l'autre :

$$P_B(A)=P(A)\text{ ou }P_A(B)=P(B)$$

On convient qu'un événement A tel que P(A)=0 est P-indépendant de tout autre.

propriété: deux événements A et B sont P-indépendants si et seulement si

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

démonstration: Si A et B sont indépendants, alors : $P(A\cap B)=P_B(A)\times P(B)=P(A)\times P(B)$ et réciproquement, si $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ on a alors: $P_B(A)\times P(B)=P(A)\times P(B)$ d'où $P_B(A)=P(A)$ et de même $P_A(B)\times P(A)=P(A)\times P(B)$ d'où $P_A(B)=P(B)$.

6.indépendance de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω telles que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ soient finis. Notons $x_1, x_2, ..., x_n$ et $y_1, y_2, ..., y_p$ les valeurs de X et Y.

X et Y sont des variables aléatoires indépendantes lorsque: