Chapitre 4 : Fonction exponentielle

I) Definition:

Il existe une fonction f definie sur $\mathbb{R}$ tel que $f = f'$ et $f(0) = 1$

Cette fonction est appelée exponentielle et on note

$f(x) = \exp(x)$

Demonstration:

Cette fonction ne s'annule jamais

On definie une fonction h par :

$h(x) = f(x) \times f(-f x)$ $\quad = -f'(-x) \;/ = -f(-x)$

$h'(x) = \underbrace{f'(x)}_{f(x)} \times f(-x) + f(x) \times \overbrace{[f(-x)]}$

$h'(x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0$

donc h est croissante et $h(0) = f(0) \times f(0) = 1$

$f(x) \times f(-x) = 1$ $\quad$ f n'est donc jamais nulle

Demonstration:

On suppose qu'il existe g t'elle que $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$

on defini par k, la fonction tel que $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

calculons $k'(x)$

$$k'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$= \frac{f(x) \times g(x) - f(x) \times g(x)}{[g(x)]^2} = 0$$

Donc k est constante

$k(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1$ et donc $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$

et $g(x) = f(x)$

f est donc unique

II) Relation fonctionnelle

Soit a et b, deux nombres réels

$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

demonstration :

On designe par f la fonction exponentielle et on définit la fonction g par ; $g(x) = f(a+b-x)$

calculons $g'(x)$

$g'(x) = f'(a+b-x) \times f(x) + f(a+b-x) \times f'(x)$

$f'(x) = f(x)$

$[f'(a+b-x)] = -f(a+b-x)$

$g'(x) = f(a+b-x) \times f(x) + f(a+b-x) \times f(x)$

$= 0$

Donc g est une fonction constante

$g(b) = f(a+b-b) \times f(x)$

$= f(a) \times f(b)$

$g(0) = f(a+b) \times f(0)$

$= f(a+b)$ & comme g est constante

et $f(a+b) = f(a) \times f(b)$

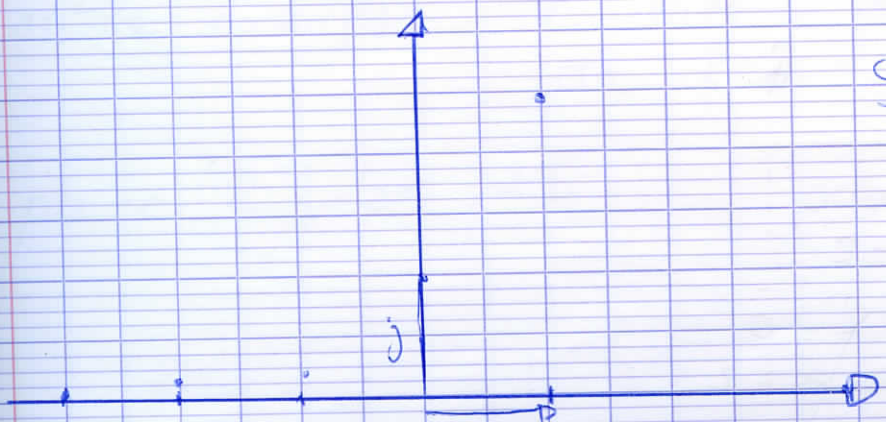
$\exp(a+b) = \exp(a) + \exp(b)$

III) Etude de la fonction exponentielle

- Elle est definie sur $\mathbb{R}$
- $(\exp(x))' = \exp(x)$
- $\exp(x) > 0$ $\left(\exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left[\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right.\right.$
- donc la fonction est strictement croissante

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$		↗	

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\exp(x)$	0,05	0,14	0,37	1	2,72	7,39	20,09



graphe de la fonction

$y = \exp(x)$

IV) Notation sous la forme e^x

l'exponentielle presente les mêmes propriétes que la fonction puissances

$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

$x^{a+b} = x^a \times x^b$

$x^0 = 1$

$\exp(0) = 1$

on peut donc noter la fonction sous la forme
$\exp(x) = e^x$
avec les propriétés suivantes
$e^{a+b} = e^a \times e^b$

$e^0 = 1$

$e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

V) Exponentielle, équations et inéquations

La fonctions exp et definie sur $\mathbb{R}$ et elle est strictement definie sur R et elle est strictement croissante. Donc

$e^a = e^b$ est équivalent à $a = b$.

et de même $e^a < e^b$ est equivalent à a

Exemple
Resoudre dans $\mathbb{R}$:

$e^{x^2} = e^{3x-2}$

$\Leftrightarrow$ $x^2 = 3x - 2$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = 1$ ou $x = 2$

autre exemple :

$$e^{5x+3} < e^{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 5x+3 < x^2+1$$
$$x^2 - 5x - 2 > 0$$

$D = 25 + 8 = 33$

$x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{33}}{2}$

$x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{33}}{2}$

$$x \in \left]-\infty ; \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right[\cup \left] \frac{5+\sqrt{33}}{2} ; +\infty\right[$$

VI) Fonctions composées avec l'exponentielles

On etudie ici les fonctions du type $e^{u(x)}$
Par exemple $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$

La derivée de $e^{u(x)}$ est $\left[e^{u(x)}\right]' = u'(x) \times e^{u(x)}$

Exemple : $f(x) = e^{x^3+x+1}$

$$f'(x) = (3x^2+1)e^{x^3+x+1}$$

autre exemple : Étudier les variations de $f(x) = e^{\frac{x+3}{x-1}}$

par $x \in]-\infty ; 1[$ puis pour $x \in]1 ; +\infty[$

$$F'(x) = \left(\frac{1 \times (x-1) - (x-3) \cancel{\times 1}}{(x-1)^2} \right) \cdot e^{\frac{x+3}{x-1}}$$

$$= \left(\frac{x-1-x-3}{(x-1)^2} \right) \cdot e^{\frac{x+3}{x-1}}$$

$$= \left(\frac{-4}{(x-1)^2} \right) \cdot e^{\frac{x+3}{x-1}}$$

$f'(x) < 0$

f est strictement de croissante.

VII) fonction exponentielle et limites

Les limites de référence sont

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\cancel{\infty}0} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

<u>démonstrations:</u> (A savoir)

On definit pour f, la fonction telle que $f(x) = e^x - x$
Etudions les variations de f:

$f(x) = e^x - 1$

$e^x - 1 \geqslant 0$
$e^x \geqslant 0$
$e^x \geqslant e^0$
$x \geqslant 0$

donc f est decroissante sur $]-\infty; 0]$
et croissante sur $[0; +\infty[$
Il y a donc un minimum en 0 et
$f(0) = e^0 - 0 = 1$ par conséquent

Donc $e^x - x > 0$
et $e^x > x$

En utilisant le théorème de comparaison en $+\infty$, on a donc : $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

2^{nde} demonstrations :

$\lim_{x \to -\infty} e^x$

en posant $x = -x$

$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

3^{eme} demonstrations :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$ on pose $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$

etudions les variations de f
$f'(x) = e^x - x$
voir demo n° 1
Donc f est strictement croissante
$f(0) = 1$
la fonction f est donc strictement positive.
$e^x - \frac{x^2}{2} > 0$

ou encore $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$

soit $\frac{e^x}{x} - \frac{x}{2} > 0$

En utilisant le théorème de

4ème démonstration :

$\lim x e^{x}$

en posant $x = -X$

$\lim\limits_{X \to +\infty} -Xe^{-X} \qquad \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{-X}{e^{X}} = \lim\limits_{X \to +\infty} = \frac{-1}{\frac{e^{X}}{X}} = 0$

5ème démonstration

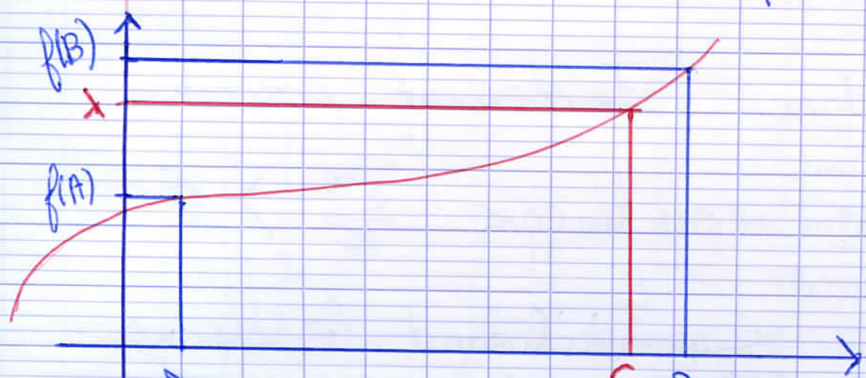
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x}-1}{x-0} = f'(0) = e^{0} = 1$

$\left(\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h} = f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right)$

Théorème des valeurs intermédiaire.
Si F est une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ et si $\lambda \in [f(a) ; f(b)]$ alors l'équation

$f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a ; b]$.

Corollaire de la bijection : Si, de plus, la fonction croissante ou décroissante sur $[a ; b]$, la solution de l'équation est unique.



$f(x) = \lambda$ il existe au moins 1 nombre $c \in [A ; B]$

Tel que $f(c) = \lambda$