Chapitre 5: Nombres Complexe.

I) Definition:

De nombreux problèmes de physiques conduisent à des équations du type $x^2+1=0$. qui n'ont pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
On introduit donc un nombre imaginaire noté i, tel que $\boxed{i^2=-1}$

On definit alors l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, par les élements qui s'écrivent

ecriture algébrique

$$\boxed{z = \underbrace{a}_{\text{Partie } \mathbb{R} \text{ de } z} + \underbrace{ib}_{\text{Partie imaginaire de } z}}$$

a et b sont des $\mathbb{R}$

$[Re(z) = a]$ $[im(z) = ib]$

Exemple:

$z = 2+3i$ $z = -5+7i$

$z = \sqrt{3}+i$

Ⓡ si $b=0$, ~~et~~ z est un réel

$$\underbrace{\mathbb{N} \subset}_{\text{"}\subset\text{" est inclus dans}} \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

II) Operation sur les nombres complexes

① additions:

Soit $z = a + ib$
et $z' = a' + ib'$

$z + z' = (a + a') + i(b + b')$

Exemple : $z = 2 - 3i$
$z' = -5 + 7i$

$z + z' = (2 - 5) + i(-3 + 7)$

$z + z' = -3 + 4i$

$z = 12 - 2i$
$z' = -3 + 2i$

$z + z' = 9 + 0i = 9$

• (R) même règle pour les soustractions.

Exemple : $z = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$
$z' = 3\sqrt{2} - 5i\sqrt{3}$

$z - z' = (\sqrt{2} - 3\sqrt{2}) + i(\sqrt{3} - (-5\sqrt{3}))$
$= -2\sqrt{2} + i\,6\sqrt{3}$
$= -2\sqrt{2} + 6i\sqrt{3}$

② Multiplication

$z = a + ib$
$z' = a' + ib'$

①

$z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib')$
$= a \times a' + \underbrace{i^2}_{-1} \times b \times b' + a \times i \times b' + i \times b \times a'$
$= aa' - bb' + i(ab' + ba')$

Exemple :

$z_1 = -2 + 3i$

$z_2 = 5 - i$

$z_1 \times z_2 = (-2 + 3i) \times (5 - i)$

$= -2 \times 5 + 3i \times (-i) + 3i \times 5 + (-2) \times (-i)$

$= -10 + 3i^2 + 15i + 2i$

$= -10 + 3 + 15i + 2i$

$= -7 + 17i$

$z_3 = -11 + 5i$

$z_4 = -7 + 3i$

$z_3 \times z_4 = (-11 + 5i) \times (-7 + 3i)$

$= -11 \times (-7) + 5i \times 3i + 5i \times (-7) + (-11) \times 3i$

$= 77 + 15i^2 + (-35i) + (-33i)$

$= 77 + 15i^2 + (-68i)$

$= 77 + (-15) - 68i$

$= 62 - 68i$

$z_5 = \sqrt{2} - i\sqrt{3}$

$z_6 = 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

$z_5 \times z_6 = (\sqrt{2} - i\sqrt{3}) \times (2\sqrt{3} - i\sqrt{3})$

$= 2\sqrt{6} + i^2\sqrt{6} + i(-\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} - \sqrt{2} \times \sqrt{2})$

$= \sqrt{6} + i(-8)$

$= \sqrt{6} - 8i$

3 inverse d'un nombre complexe

Définition du conjugué d'un nombre complexe :

si $z = a + ib$, le conjugué de z est noté $\bar{z}$ et $\bar{z} = a$

Exemple : $z = 1 + i\sqrt{2}$

$\bar{z} = -1 - i\sqrt{2}$

Conséquence : $z \times \bar{z} = (a+ib)(a-ib)$

$$= a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2 b^2$$

$$= a^2 + b^2$$

$$\boxed{z \times \bar{z} = a^2 + b^2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \times \bar{z}}{z \times \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \underline{\frac{a}{a^2+b^2} - i\,\frac{b}{a^2+b^2}}$$

Exemple : $z = 2 - 3i$

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \times \bar{z}}{z \times \bar{z}} = \frac{2+3i}{(2)^2+(-3)^2} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2+3i}{13}$$

$$= \frac{2}{13} + i\,\frac{3}{13}$$

$z_1 = -7 + 2i$

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \times \bar{z}}{z \times \bar{z}} = \frac{-7-2i}{(-7)^2+2^2} = \frac{-7-2i}{49+4} = \frac{-7-2i}{53} = \frac{-7}{53} - i\,\frac{2}{53}$$

$z_2 = 1 + i\sqrt{2}$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1 \times \bar{z}}{z \times \bar{z}} = \frac{+1-i\sqrt{2}}{(+1)^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{+1-i\sqrt{2}}{1+2} = \frac{+1-i\sqrt{2}}{3} = \frac{+1}{3} - i\,\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$z_3 = \sqrt{3} - i$

$$\frac{1}{z_3} = \frac{1 \times \bar{z}}{z \times \bar{z}} = \frac{\sqrt{3}+i}{(\sqrt{3})^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}+i}{3+1} = \frac{\sqrt{3}+i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + i$$

$z_4 = -8 + 5i$

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \times \bar{z}}{z \times \bar{z}} = \frac{-8-5i}{(-8)^2+(5)^2} = \frac{-8-5i}{64+25} = \frac{-8-5i}{89} = \frac{-8}{89} + 1\,\frac{5}{89}$$

④ division de Nombres complexes

$z = a + ib \qquad z' = a' + ib'$

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = z \times \frac{\overline{z'}}{z'\overline{z'}}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{2-3i}{-1+4i} = (2-3i) \times \frac{-1-4i}{(-1)^2+(4)^2} = (2-3i)\,\frac{-1-4i}{17}$$

$$= \frac{(2-3i)(-1-4i)}{17} = \frac{-14-5i}{17}$$

$$= \frac{-14}{17} - i\,\frac{5}{17}$$

autres Exemples :

① $\dfrac{2+5i}{1-3i}$; ② $\dfrac{4+i}{1-i}$; ③ $\dfrac{2+2i}{\sqrt{3}-i}$

$$2+5i \times \frac{1}{1-3i} = \frac{1+3i}{1^2+3^2} \times 2+5i = 2+5i \times \frac{1+3i}{1+9} = \frac{(2+5i)(1+3i)}{10}$$

$$= 2\times 3i + 5i \times 3i + 2 \times 1 + 5i \times 1 = 6i + 15i^2 + 2 + 5i$$

$$= \frac{-13+11i}{10} = \frac{-13}{10} + i\,\frac{11}{10}$$

$$4+1 \times \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{1^2+1^2} \times 4+1 = 4+1 \times \frac{1+i}{2} = \frac{(4+1)\times(1+i)}{2}$$

III) Résolution d'équations du second degré dans $\mathbb{C}$

On résoud les équations du type

$$az^2 + bz + c = 0$$

ou a, b, c sont des $\mathbb{R}$ et a non nul.

On a $\Delta = b^2 - 4ac$

si $\Delta > 0 \to$ voir cours precedents (2 sol).

Si $\Delta < 0 \to$ 2 sol dans $\mathbb{C}$ = complexe conjugées

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple: Resoudre dans $\mathbb{C}$

$$z^2 + z + 1 = 0$$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$

il existe donc 2 solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Demonstration

$az^2 + bz + c$, sous forme canonique s'ecrit $az^2 + bz + c = a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] =$

$$= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

→ Si $\Delta > 0$ on factorise et il y a 2 racine réelles

→ Si $\Delta < 0$ on remarque que

$$\Delta = (i\sqrt{-\Delta})^2 = i^2 \times (\sqrt{\Delta})^2 = -(-\Delta) = \Delta$$

(+) $$= a\left[(z-\alpha)^2+\beta\right]$$

$$a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{4a}\right)^2\right]$$

$$a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right) + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right]\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right) - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right]$$

$$a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

$$a\left(z+\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

Soit $z_1 = -\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \cancel{\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}} = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$z_2 = -\frac{b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$

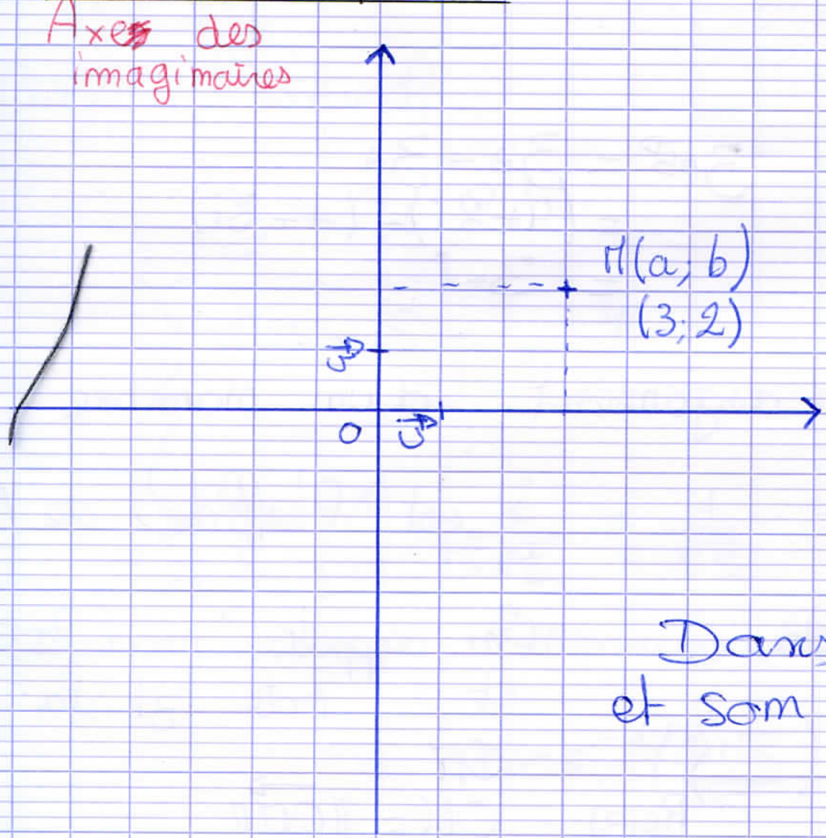
IV) Représentation géométrique des nombres comple

① Le plan complexe

$z = a+ib$ et la forme algébrique d'un nombre complexe on représente z par un point dans

le plan complexe avec z pour image un point M de coordonnées $(a ; b)$
z est appelé l'affixe de F

Plan Complexe



Dans l'exemple $M(3 ; 2)$
et son affixe est $z = 3 + 2i$

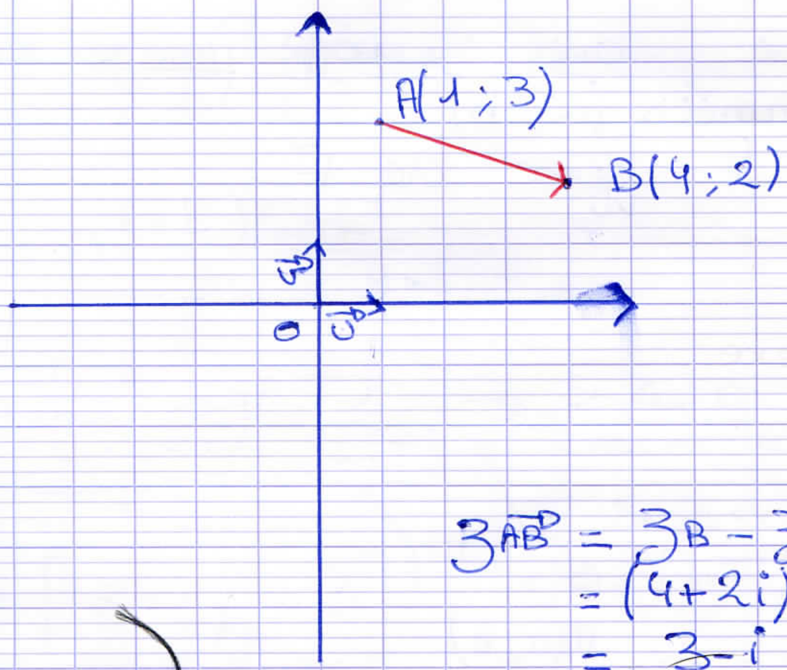
Affixe d'un vecteur

Si A et B sont deux points du plan complexe d'affixes respectives

$z_A = x_A + iy_A$ $\qquad$ $z_B = x_B + y_A$

alors le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe

$$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$$

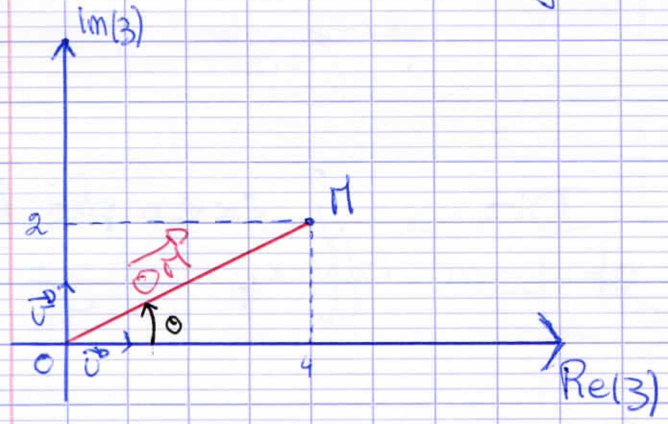


$\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right.$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$
$$= (4+2i)-(1+3i)$$
$$= 3-i$$

② Module et argument d'un nombre complexe

2)



z est l'affixe de M

On appelle "module de z" et on note $|z|$ la distance OM

$OM = \|\overrightarrow{OM}\|$

$z = a+ib$, le point O a pour affixe 0

Donc $\boxed{OM = \sqrt{a^2+b^2} = |z|}$

Dans l'exemple:

$$z = 4+2i$$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$= \sqrt{20}$$
$$= 2\sqrt{5}$$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

(R) le module de z se note parfois

$$|z| = \cancel{R} = \rho$$

On appelle argument de z et on note $\arg(z) = \theta$ l'angle $(\vec{u}; \vec{OM})$

Dans l'exemple :

$$z = 4 + 2i$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

pas de valeurs Remarquable ici, on utilise la calc

$$\cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \simeq 0,464$$

Autres exemples : Calculer le module et un arguments des complexes suivants

$z_1 = 1 + i$ $\qquad |z| = \sqrt{1^2 + 1^2}$
$= \sqrt{2}$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \theta = \dfrac{\pi}{4}$ Rad

$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$z_2 = 3 - 3i$ $\qquad |z| = \sqrt{3^2 + 3^2}$
$= \sqrt{18}$
$= 3\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin\theta = -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta = -\pi/4$ Rad.

33 $1 + i\sqrt{3}$

$|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}$
$= \sqrt{4} = 2$

$\cancel{\cos\theta = \frac{1}{2}}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \boxed{\pi/6}$ Rad

$\frac{5\pi}{6}$

34 $= -\sqrt{3} + i$

$|z| = \sqrt{-\sqrt{3}^2 + i^2}$
$= \sqrt{+3+1}$
$= \sqrt{4}$
$= 2$

$\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ Rad

35 $= -5 + 5i\sqrt{3}$

$|z| = \sqrt{-5^2 + 5\sqrt{3}}$
$= \sqrt{25 + 75}$
$= \sqrt{100} = 10$

$\cos\theta = \frac{-5}{10} = \frac{-1}{2}$

$\sin\theta = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\theta = -\frac{\pi}{3}$ Rad

Donc $\arg(z)$ | $\cos = \frac{a}{|z|}$

$\sin = \frac{b}{|z|}$