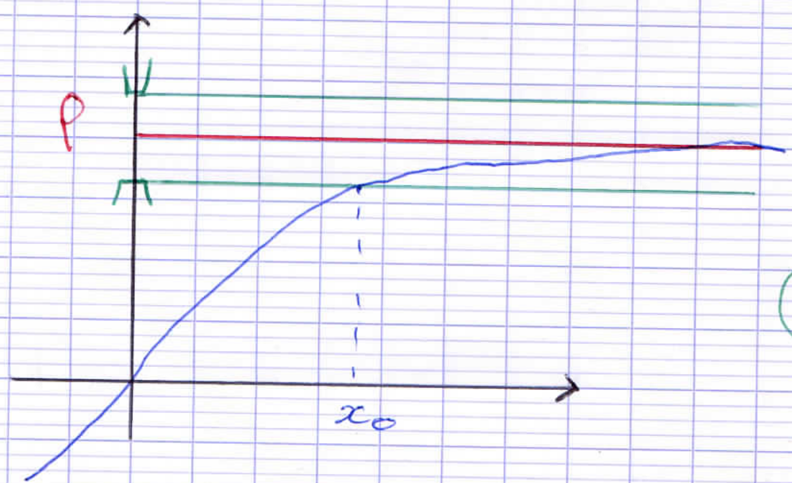
Chapitre 7 : Limites de fonctions

I) Definition au voisinage de l'infini

On étudie ici les limites de fonctions lorsque x tend vers $+\infty$ - l'infini.

① Si lorsque x tend vers $+\infty$, tout intervalle ouvert contenant un nombre L contient toutes les valeurs de $f(x)$ à partir d'un nombre x_0, alors la fonction admet pour limite l au voisinage de $+\infty$ et on ecrit :

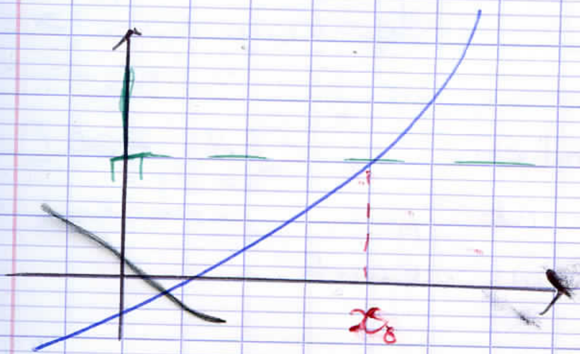
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$



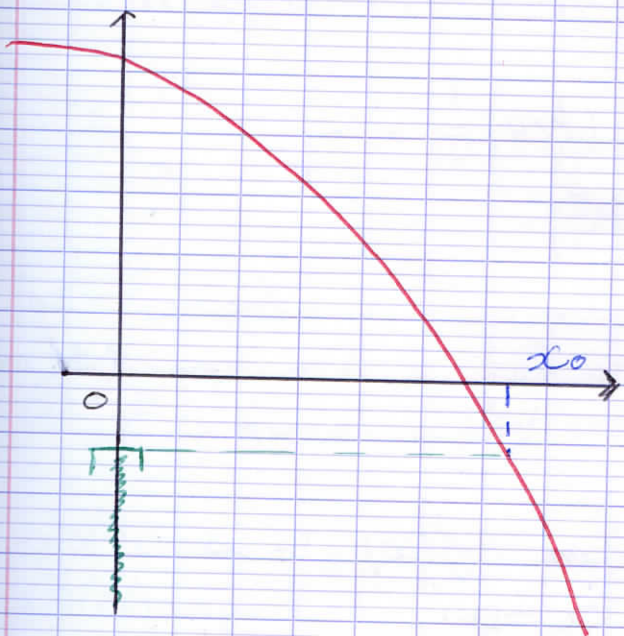
Ⓡ x_0 depend de l'intervalle.

② Si, lorsque x tend vers $+\infty$ pour tout intervalle ouvert $]A; +\infty[$ il existe un nombre x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$, tous les $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $[A; +\infty[$ alors la fonction tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et on ecrit

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

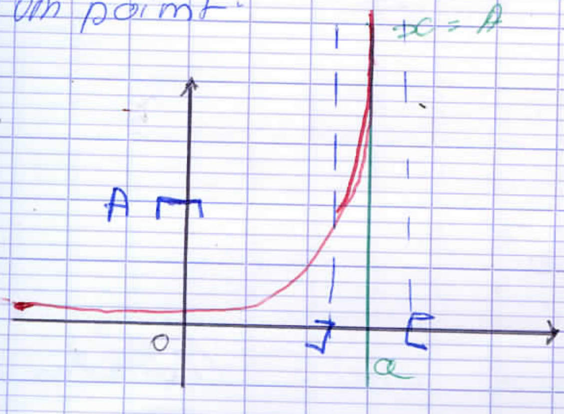


③ Si, lorsque x tend vers $+\infty$, pour tout int ouvert $]-\infty\,;\,A[$, il existe un nombre x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$ tous les $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $]-\infty\,;\,A[$ alors la fonction tend vers $-\infty$ au voisinage de ~~$-\infty$~~ $+\infty$ et on écrit.



Ⓡ les 3 définitions écrites au voisinage $+\infty$ peuvent être donné en $-\infty$ en adaptant

II) Définition d'une limite au voisinage d'un point.



Si quelque soit A, il existe un reel α tel que pour tout $x \in]a-\alpha ; a[$.
$f(x)$ appartienne à l'intervalle $]A ; +\infty[$
alors la fonction admet pour limite $+\infty$ ~~au~~ voisinage de a et on ecrit

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

(R) Comme ici $x \in]a-\alpha ; a[$ on peut parler de limite à gauche de a et on ecri

$$\lim_{\substack{x \to a \\ a<a}} f(a) = +\infty$$

ou encore $\lim_{x \to A} (f(A) = +\infty$

On definit de manière analogue si les 2 limites a droite, Si les 2 limites (à droite et gauche) son identique. on ecrit

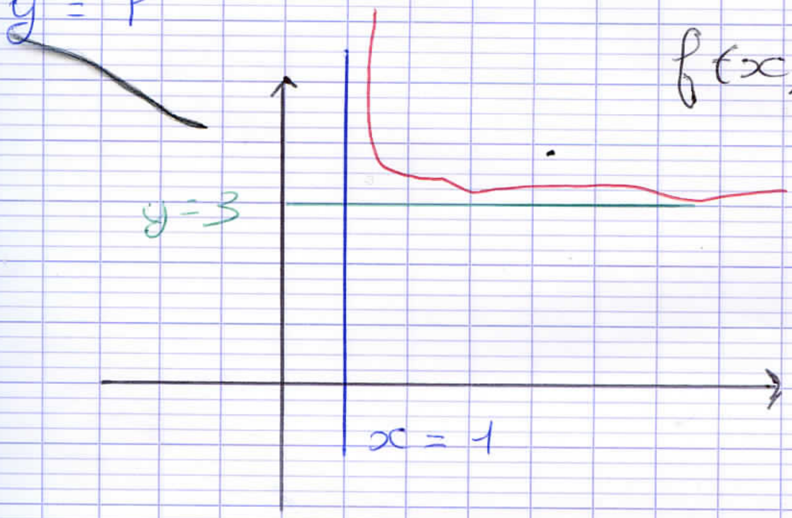
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

On definit donc de même les limites a droite.

III) Asymptotes

① Asymptotes "horizontales"

Si ~~on~~ une fonction a une limites fini l au voisimage de l'imfimi, alors sa courbe representative admet par asymptote "horizontale" la droite d'equation $y = l$



$f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$ $x \in]1; +\infty[$

om a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

domc C_f admet ume asymptote horizomtale d'équatiom $y = 3$

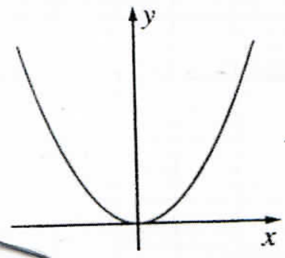
de même :

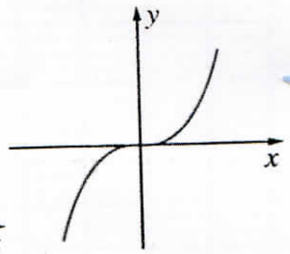
$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ C_f admet ume asymptote verticale d'équatiom $x = 1$.

② Asymptote "Verticale".

Si ume fomctiom a ume lim ∞ au voisimage de a alors sa courbe representative admet ume asymptote verticale de $x = 1$.

Limites des fonctions usuelles





$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}^*$

si n est pair :

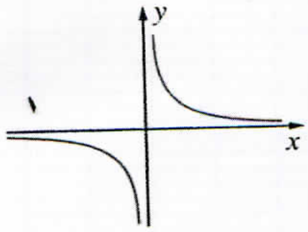
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

si n est impair :

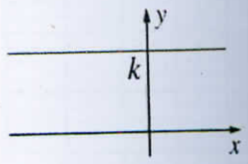
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

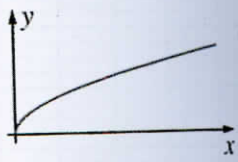
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$



$\lim\limits_{x \to -\infty} k = k$

$\lim\limits_{x \to +\infty} k = k$

k étant un réel



$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

On peut aussi définir la notion de limite finie en un réel a. On admet que :

(1) $\lim\limits_{x \to a} k = k$, k étant un réel

(2) $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$, n étant un entier naturel non nul

(3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}$ pour $a \neq 0$

(4) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ pour $a \geqslant 0$

Théorèmes généraux pour la somme et le produit

L et L' sont des réels et le réel a peut être remplacé par $+\infty$ ou par $-\infty$.

Règles pour la somme

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} v(x) =$	L'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} (u(x) + v(x)) =$	$L + L'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Règles pour le produit

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) =$	L	L ($L \neq 0$)	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} v(x) =$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
alors $\lim\limits_{x \to a} (u(x) \times v(x)) =$	$L \times L'$	$+\infty$ ou $-\infty$*	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

* Le choix entre $+\infty$ ou $-\infty$ est déterminé par le signe de $u(x)$ et celui de $v(x)$.

Exemples :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 6$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-6) = -6$ donc par règle pour la somme $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 6) = -\infty$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -6x^3$.
$\lim (-6) = -6$ et $\lim x^3 = +\infty$ donc par règle pour le produit $\lim (-6x^3) = -\infty$.

Théorèmes généraux pour le quotient

L et L' sont des réels et le réel a peut être remplacé par $+\infty$ ou par $-\infty$.

Règles pour le quotient

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) =$	L	L $(L \neq 0)$	L	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} v(x) =$	L' $(L' \neq 0)$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	L'	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u(x)}{v(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	$+\infty$ ou $-\infty$ (*)	0	$+\infty$ ou $-\infty$ (*)	F.I.	

* Le choix entre $+\infty$ et $-\infty$ est déterminé par le signe de $u(x)$ et celui de $v(x)$.

Pour déterminer les limites de l'inverse d'une fonction, on utilise les premières colonnes tableau ci-dessus avec $u(x) = 1$ et donc $L = 1$.

Exemples :

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 + 1} = 0$.

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$ par $g(x) = \dfrac{-2}{x^2}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-2) = -2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ donc par règle pour le quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2}{x^2} = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (-2) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} x^2 = 0^+$ (car $x^2 > 0$) donc par règle pour le quotient $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{-2}{x^2} = -$

Limites d'une fonction composée

Certaines fonctions ne peuvent pas être écrites comme somme, produit ou quotient de fonctio usuelles. Une autre opération sur les fonctions existe : la composition.

Exemple : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - x}$.
Pour calculer $f(x)$, on calcule d'abord $1 - x$, puis la racine carrée de ce réel.
f est l'enchaînement de deux fonctions :
u définie sur $]-\infty ; 1]$ par $u(x) = 1 - x$
suivie de v définie sur $[0 ; +\infty[$ par $v(X) = \sqrt{X}$.
On a $f(x) = \sqrt{1 - x} = v(1 - x) = v(u(x))$.

Définition v est une fonction définie sur un intervalle J et u est une fonction définie sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I, $u(x)$ appartient à J.
La fonction composée « u suivie de v » est la fonction f définie sur I par $f(x) = v(u(x))$.

Théorème (admis) Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{X \to b} v(X) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} v(u(x)) = c$.
a, b et c désignent des réels, $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - x}$.
f est la composée de u suivie de v avec $u(x) = 1 - x$ et $v(X) = \sqrt{X}$ (voir ci-dessus)
$\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x \to 1} (1 - x) = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \sqrt{X} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

Théorèmes de comparaison (admis)

Ces théorèmes sont énoncés avec les limites quand x tend vers $+\infty$ ($[\alpha\ ;+\infty[$ est un intervalle sur lequel sont définies les fonctions f, g et h).
On pourrait également les énoncer quand x tend vers $-\infty$ (on remplacera $[\alpha\ ;+\infty[$ par $]-\infty\ ;\beta]$) ; ou quand x tend vers un réel a (on remplacera $[\alpha\ ;+\infty[$ par $[a-r\ ;a[$ ou $]a\ ;a+r]$ où $r>0$).

Théorèmes

(1) Si pour tout réel x appartenant à un intervalle $[\alpha\ ;+\infty[$:

$$f(x)\leqslant g(x) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \text{ alors } \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty.$$

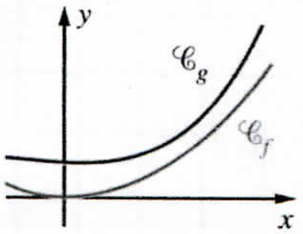
(2) Si pour tout réel x appartenant à un intervalle $[\alpha\ ;+\infty[$:

$$f(x)\leqslant g(x) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty, \text{ alors } \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty.$$

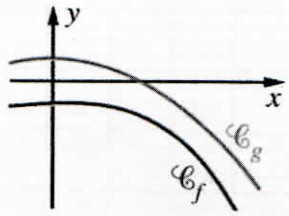
(3) Théorème des gendarmes

Si pour tout réel x appartenant à un intervalle $[\alpha\ ;+\infty[$:

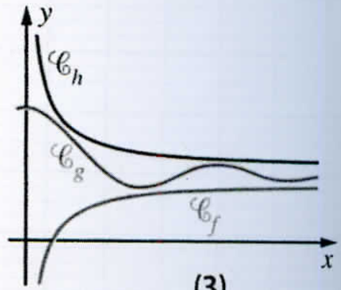
$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} h(x)=L, \text{ alors } \lim_{x\to+\infty} g(x)=L.$$



(1)



(2)

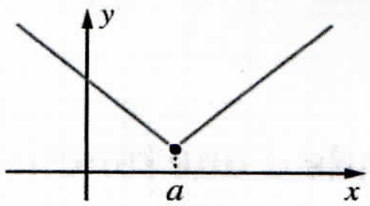


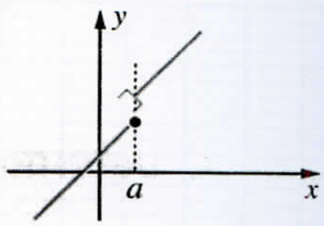
(3)

Continuité

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.
On dit que la fonction f est continue en a si, et seulement si, $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

f est continue en a





f n'est pas continue en a

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que la fonction f est continue sur I lorsqu'elle est continue en tout point de I.

Les fonctions $x\mapsto |x|$ et $x\mapsto x^n$, n étant un entier naturel, sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $[0\ ;+\infty[$.
La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\ ;0[$ et sur $]0\ ;+\infty[$.

Propriété (admise) Les fonctions dérivables sur un intervalle I sont continues sur I.

Propriétés (admises) Soit u et v des fonctions continues sur I.

(1) $u+v$, $u\times v$ et u^n (n entier naturel non nul) sont continues sur I.

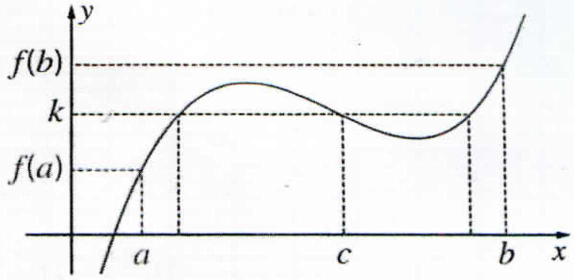
(2) $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont continues sur les intervalles où elles sont définies.

Exemples :
- La fonction $x\mapsto 3x^2-2x+5$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x\mapsto\dfrac{x-3}{x+1}$ est continue sur $]-\infty\ ;-1[$ et sur $]-1\ ;+\infty[$

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

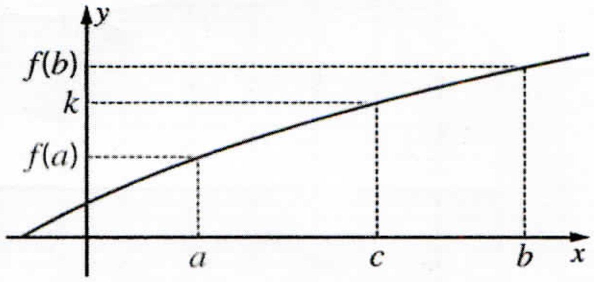
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.



En d'autres termes, l'équation $f(x)=k$ a au moins une solution dans l'intervalle $[a\,;b]$.

Corollaire (admis)

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ a une et une seule solution dans l'intervalle $[a\,;b]$.

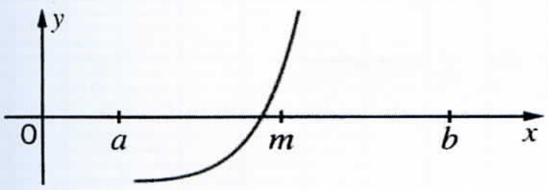


Le corollaire s'applique aussi dans le cas d'un intervalle $[a\,;b[$,$]a\,;b]$ ou $]a\,;b[$, a et b pouvant être $+\infty$ ou $-\infty$. On remplace alors $f(a)$ (ou $f(b)$) par $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (ou $\lim\limits_{x\to b} f(x)$).

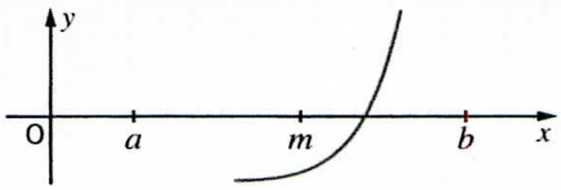
Ce corollaire permet d'affirmer l'existence d'une unique solution à une équation que l'on ne sait pas résoudre par le calcul. On cherche alors une valeur approchée de cette solution.

Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie Algo

Pour encadrer la solution de l'équation $f(x)=0$, on détermine successivement l'intervalle dans lequel se situe la solution en divisant par 2 l'amplitude de l'intervalle à chaque étape.
On calcule le milieu m de l'intervalle $[a\,;b]$.



Si la solution est dans $[a\,;m]$,
on recommence ce procédé dans $[a\,;m]$.



Si la solution est dans $[m\,;b]$,
on recommence ce procédé dans $[m\,;b]$.

Algorithme de dichotomie

Variables a, b, e et m sont des réels
Entrée Saisir a , b et e
Traitement **Tant que** $b-a \geqslant e$ faire
  m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
  Si $f(a)\times f(m) \leqslant 0$
    alors b prend la valeur m
    sinon a prend la valeur m
  Fin Si
Fin Tant que
Sortie Afficher a et b

Commentaires :
f doit être une fonction continue, strictement monotone sur l'intervalle $[a\,;b]$ et telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
e est la précision demandée.
Pour tester si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires, on teste le signe de leur produit.
Cet algorithme ne teste pas le cas où m est la solution (voir l'exercice **121** p. 74).